1990

Agrégation de mathématiques

Mathématiques générales

6538. *Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Notations et définitions.

Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ est muni de la topologie associée à l'une quelconque de ses normes.

Si $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie, on note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathscr{V}$ et

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

la norme euclidienne de x.

On associe à toute famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $\mathscr{V}$ sa matrice de Gram, $G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, définie par

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = ((x_i|x_j)).$$

On note id l'application linéaire identité de $\mathscr{V}$.

fg désigne la composée $f \circ g$ de deux éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, et on définit f^k, pour tout k de $\mathbf{N}$, par

$$f^0 = \text{id} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{k+1} = f^k \circ f.$$

$\ker(f)$, $\text{im}(f)$, $\det(f)$, $\text{rg}(f)$ désignent respectivement le noyau, l'image, le déterminant et le rang d'un élément f de $\mathscr{L}(\mathscr{V})$.

On munit $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ de la norme usuelle d'opérateurs déduite de celle de $\mathscr{V}$ (on rappelle que, si f appartient à $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (\|f(x)\|)$).

Si f appartient à $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, on définit son polynôme caractéristique χ_f par

$$\forall\lambda \in \mathbf{R},\quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda\, \mathrm{id} - f).$$

On note $\rho(f)$ le rayon spectral de f, c'est-à-dire le plus grand module des racines réelles ou complexes de χ_f (on conviendra, lorsque $\mathscr{V} = \{0\}$, que $\chi_f = 1$ et $\rho(f) = 0$).

On admettra que

$$(\rho(f) < 1) \Leftrightarrow \left(\lim_{p\to+\infty} f^p = 0\right) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{N}\ |||f^k|| < 1).$$

On note f^* l'opérateur adjoint de f.

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathscr{L}(\mathscr{V})$:

$$\mathscr{B}(\mathscr{V}) = \{f \in \mathscr{L}(\mathscr{V})\ |\ \|f\| \leqslant 1\}$$
$$\mathscr{B}_0(\mathscr{V}) = \{f \in \mathscr{B}(\mathscr{V})\ |\ \rho(f) < 1\}$$
$$\mathscr{C}(\mathscr{V}) = \{f \in \mathscr{B}(\mathscr{V})\ |\ \mathrm{rg}(\mathrm{id} - f^*f) \leqslant 1\}$$
$$\mathscr{C}_0(\mathscr{V}) = \{f \in \mathscr{C}(\mathscr{V})\ |\ \rho(f) < 1\}.$$

On note $\mathscr{O}(\mathscr{V})$ le groupe orthogonal de $\mathscr{V}$.

On note $\mathscr{S}(\mathscr{V})$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de $\mathscr{V}$. On note $\mathscr{S}^+(\mathscr{V})$ la partie de $\mathscr{S}(\mathscr{V})$ constituée des endomorphismes symétriques positifs : on dit qu'un endomorphisme f de $\mathscr{S}(\mathscr{V})$ est positif (resp. défini positif) si, et seulement si, f vérifie

$$\forall x \in \mathscr{V},\quad (x\,|\,f(x)) \geqslant 0 \quad (\text{resp. } \forall x \in \mathscr{V}\backslash\{0\},\ (x\,|\,f(x)) > 0).$$

$\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre k à coefficients réels. On note I_k la matrice identité d'ordre k.

On identifie $\mathbf{R}^k$ avec l'ensemble des matrices colonnes à k lignes, et les éléments de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^k)$ avec leur matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^k$ notée $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$. $\mathbf{R}^k$ est muni du produit scalaire canonique, de telle sorte que si A appartient à $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$, A^* s'identifie avec la matrice transposée de A. On notera également X^* la matrice ligne transposée de la matrice colonne X de $\mathbf{R}^k$.

$\mathbf{R}[T]$ désigne l'algèbre des polynômes à une indéterminée T sur $\mathbf{R}$.

Si $P(T) = T^k - a_{k-1}T^{k-1} - \cdots - a_1 T - a_0$ est un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[T]$, on appelle matrice compagnon de P la matrice C définie par

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{k-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Dans tout le problème, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

I. — Questions utiles pour la suite du problème.

A. Décomposition d'un élément de $\mathscr{S}(E)$.

1° Soit f_u appartenant à $\mathscr{L}(E)$ définie par $f_u(x) = (u\,|\,x)u$ où u est un vecteur donné de E.

a) Vérifier que f_u appartient à $\mathscr{S}^+(E)$.

b) Préciser le rang de f_u.

c) Reconnaître f_u lorsque $\|u\| = 1$.

d) Si B est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de u dans la base B, vérifier que la matrice de f_u dans la base B est UU^*.

Dans toute la suite du problème, on notera uu^* l'application f_u.

2° Soit u et v deux vecteurs de E ; à quelle condition a-t-on $uu^* = vv^*$?

3° Soit f appartenant à $\mathscr{S}(E)$. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et d'un n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de réels tels que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*$.

Que représentent pour f les λ_i et les e_i ? A quelle condition f est-elle dans $\mathscr{S}^+(E)$?

4° Soit f appartenant à $\mathscr{S}(E)$. Montrer que $f = 0$ si, et seulement si, $\forall x \in E$, $(x \mid f(x)) = 0$.

5° Soit f appartenant à $\mathscr{S}^+(E)$ et x un vecteur de E. Montrer que $f(x) = 0$ si, et seulement si, $(x \mid f(x)) = 0$.

6° Soit f appartenant à $\mathscr{L}(E)$. Montrer que f appartient à $\mathscr{S}^+(E)$ si, et seulement, si il existe n vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*.$$

B. Caractérisation des éléments de $\mathscr{B}(E)$ et de $\mathscr{C}(E)$.

1° Soit f appartenant à $\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|^2 \leqslant \|x\| \, \|f^* f(x)\|$.
En déduire que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|f^*\| \, \|x\|$.

b) Établir que $\|f\| = \|f^*\|$.

2° Soit f appartenant à $\mathscr{L}(E)$.

a) Vérifier que $f^* f$ appartient à $\mathscr{S}^+(E)$.

b) Montrer que f appartient à $\mathscr{B}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{id} - f^* f$ appartient à $\mathscr{S}^+(E)$.

3° Soit f appartenant à $\mathscr{B}(E)$.
Notons $E_f = \{x \in E \mid \|f(x)\| = \|x\|\}$ et $E_f^* = \{x \in E \mid \|f^*(x)\| = \|x\|\}$.

a) Montrer que $\|f\| = 1$ si, et seulement si, $E_f \neq \{0\}$.

b) Montrer que $E_f = \ker(\mathrm{id} - f^* f)$, $E_f^* = \ker(\mathrm{id} - f f^*)$.

c) Établir les égalités suivantes : $f(E_f) = E_f^*$, $f^*(E_f^*) = E_f$, et $\dim(E_f^*) = \dim(E_f)$.

4° Soit f appartenant à $\mathscr{L}(E)$. Vérifier que f appartient à $\mathscr{C}(E)$ si, et seulement si, f^* appartient à $\mathscr{C}(E)$, et que f appartient à $\mathscr{C}_0(E)$ si, et seulement si, f^* appartient à $\mathscr{C}_0(E)$.

5° Soit f appartenant à $\mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f appartient à $\mathscr{C}(E)$;

(ii) il existe u appartenant à E tel que $\mathrm{id} - f^* f = u u^*$;

(iii) il existe u appartenant à E tel que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u \mid x)^2$.

C. Propriétés des matrices compagnons.

Calculer en fonction de P, polynôme unitaire de $\mathbf{R}[T]$, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C, matrice compagnon de P.

II

Le but de cette partie est de déterminer les matrices triangulaires inférieures qui sont dans $\mathscr{C}(\mathbf{R}^n)$ et, si A est une de ces matrices, de trouver U appartenant à $\mathbf{R}^n$ tel que $I_n - A^*A = UU^*$.

1° Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \nu & \mu \end{bmatrix}$ appartenant à $\mathscr{C}(\mathbf{R}^2)$. Vérifier que $\nu^2 = (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)$.
En déduire que les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{C}(\mathbf{R}^2)$ s'écrivent

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$

avec α et β réels quelconques ; trouver alors U de $\mathbf{R}^2$ tel que $I_2 - A^*A = UU^*$.

2° On suppose $n \geqslant 2$. Soit $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{in} = 0$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, et

$$U = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \text{ de } \mathbf{R}^n.$$

On écrit $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C^* & a_{nn} \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} W \\ b_n \end{bmatrix}$, avec B appartenant à $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$, C et W matrices colonnes de $\mathbf{R}^{n-1}$.

Montrer que $I_n - A^*A = UU^*$ si, et seulement si, il existe θ_n de $\mathbf{R}$ et V de $\mathbf{R}^{n-1}$ vérifiant les égalités suivantes :

$$a_{nn} = \cos(\theta_n), \quad b_n = \sin(\theta_n), \quad C = -\sin(\theta_n)V, \quad W = \cos(\theta_n)V \quad \text{et} \quad I_{n-1} - B^*B = VV^*.$$

3° Donner un algorithme permettant de construire une matrice triangulaire inférieure de $\mathscr{C}(\mathbf{R}^n)$ dont les valeurs propres sont imposées dans $[-1, 1]$. En déduire la forme générale de telles matrices et préciser pour chacune d'entre elles un élément U de $\mathbf{R}^n$ tel que $I_n - A^*A = UU^*$.

III. — Étude de $\mathscr{B}(E)$ et de $\mathscr{C}_0(E)$

Dans toute cette partie III, f appartient à $\mathscr{B}(E)$, E_f et F sont définis par

$$E_f = \{x \in E \mid \|f(x)\| = \|x\|\},$$
$$F = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbf{N}, f^k(x) \in E_f\},$$

et on note G l'orthogonal de F dans E.

A. Décomposition d'un élément de $\mathscr{B}(E)$

1° Établir les propriétés suivantes :

a) F est un sous-espace vectoriel de E ;

b) $f(F) = F$ et $f^*(F) = F$;

c) $f(G) \subset G$.

2° On note $\varphi = f_{|F}$ et $\psi = f_{|G}$, les endomorphismes de F et G induits par f.

a) Montrer que ψ appartient à $\mathscr{B}(G)$.

b) Montrer que φ appartient à $\mathscr{O}(F)$.

c) Soit x appartenant à E. On suppose que x n'appartient pas à F et on appelle k le plus petit entier naturel tel que $f^k(x)$ n'appartient pas à E_f.

Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^k(x))$ est une famille libre de E. En déduire que $\|f^n(x)\| < \|x\|$.

d) Montrer que ψ appartient à $\mathscr{B}_0(G)$.

3° Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) f appartient à $\mathscr{B}_0(E)$;

(ii) $\|f^n\| < 1$;

(iii) $F = \{0\}$.

B. Caractérisation des éléments de $\mathscr{C}_0(E)$

1° On suppose dans cette question que f appartient à $\mathscr{C}(E)$ et que u est un vecteur de E tel que $\mathrm{id} - f^*f = uu^*$.

a) Montrer que x appartient à F si, et seulement si, $(x \mid u) = (f(x) \mid u) = \ldots = (f^{n-1}(x) \mid u) = 0$.

b) En déduire que f appartient à $\mathscr{C}_0(E)$ si, et seulement si, $(u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-1}(u))$ est une base de E.

2° On suppose dans cette question que f appartient à $\mathscr{C}_0(E)$. Montrer qu'il existe x appartenant à $E \backslash \{0\}$ tel que

$$\|x\| = \|f(x)\| = \ldots = \|f^{n-1}(x)\|.$$

En déduire que $\|f^k\| = 1$ pour tout k de $\{0, \dots n-1\}$, et $\|f^n\| < 1$.

3° Réciproquement, on suppose que f vérifie $\|f^k\| = 1$ pour tout k de $\{0, \dots, n-1\}$, et $\|f^n\| < 1$. Soit x non nul tel que $\|x\| = \|f^{n-1}(x)\|$, montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E et que f appartient à $\mathscr{C}_0(E)$.

C. Étude d'une base adaptée à un élément de $\mathscr{C}_0(E)$ et de sa matrice de Gram

On suppose dans toute la fin de cette partie III que f est un élément de $\mathscr{C}_0(E)$ et on note C la matrice compagnon de son polynôme caractéristique.

1° Montrer que l'on peut trouver v_1 appartenant à E tel que

$$\|f^{n-1}(v_1)\| = \|v_1\| \qquad \text{et} \qquad \|v_1\|^2 - \|f^n(v_1)\|^2 = 1.$$

On pose alors $v_2 = f(v_1)$, $v_3 = f^2(v_1)$, $\dots$, $v_n = f^{n-1}(v_1)$. Vérifier que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

2° On appelle Ω la matrice de Gram $G(v_1, \dots, v_n)$.

a) Montrer que $C^*\Omega C = G(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$.

b) En déduire que $\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*$.

Dans toute la fin du problème, P désigne un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[T]$, de degré n dont toutes les racines réelles ou complexes sont de module strictement inférieur à 1, et C est sa matrice compagnon.

IV. — Résolution dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de l'équation à l'inconnue G : $G - C^*GC = H$.

1° Soit A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = C^*AC$. Montrer que $A = 0$.

2° Soit B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer qu'il existe une unique matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A - C^*AC = B$.

b) Établir que $A = \sum_{p=0}^{+\infty} (C^*)^p B (C)^p$.

3° Soit H appartenant à $\mathscr{S}^+(\mathbf{R}^n)$, et G de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $G - C^*GC = H$.

a) Montrer que G appartient à $\mathscr{S}^+(\mathscr{R}^n)$.

b) Établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X appartient à $\ker(G)$;

(ii) $\forall k \in \mathbf{N}$, $C^k X \in \ker(H)$;

(iii) $HX = HCX = \dots = HC^{n-1}X = 0$.

4° Soit U appartenant à $\mathbf{R}^n$ et G de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $G - C^*GC = UU^*$. Montrer que G est définie positive si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $(X|U) = (CX|U) = \dots = (C^{n-1}X|U) = 0 \Rightarrow X = 0$;

(ii) $(U, C^*U, (C^*)^2U, \dots, (C^*)^{n-1}U)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

5° Soit Ω appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*$.

a) Établir que Ω est définie positive.

b) U étant un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$, et G la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $G - C^*GC = UU^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbf{R}[T]$ vérifiant $d^0Q \leqslant n-1$ et $U = (Q(C))^*E_n$. En déduire que $G = (Q(C))^*\Omega Q(C)$.

c) G étant un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, prouver que $G - C^*GC$ appartient à $\mathscr{S}^+(\mathbf{R}^n)$ si, et seulement si, il existe n polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ appartenant à $\mathbf{R}[T]$, tels que $G = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$.

V

A. Existence d'éléments f de $\mathscr{C}_0(E)$ tels que $\chi_f = P$

1° Dans cette question seulement on suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe f appartenant à $\mathscr{C}_0(E)$ tel que $\chi_f = P$.

2° Soit Ω appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*$.

a) Montrer qu'il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que $G(v_1, \ldots, v_n) = \Omega$.

b) En déduire qu'il existe f appartenant à $\mathscr{C}_0(E)$ tel que $\chi_f = P$.

3° Soit f et g appartenant à $\mathscr{C}_0(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists r \in \mathscr{O}(E) \mid rfr^{-1} = g$;

(ii) $\exists r \in GL(E) \mid rfr^{-1} = g$;

(iii) $\chi_f = \chi_g$.

B. Maximum de $\|Q(g)\|$ lorsque $\|g\| \leqslant 1$ et $P(g) = 0$

Dans toute la fin du problème, f désigne un élément $\mathscr{C}_0(E)$ de polynôme caractéristique P, et g un élément de $\mathscr{B}(E)$ vérifiant $P(g) = 0$.

1° Soit u appartenant à E ; on note G la matrice $G(u, g(u), \ldots, g^{n-1}(u))$.

a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant n réels, on pose

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i g^{i-1}(u).$$

Établir que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[T]$, on a

$$\|Q(g)(x)\|^2 = (Q(C)X)^* G (Q(C)X).$$

b) Montrer que $G - C^*GC$ appartient à $\mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que l'on peut trouver n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E tels que

$$\forall Q \in \mathbb{R}[T], \quad \|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)(u_i)\|^2.$$

2° Soit Q appartenant à $\mathbb{R}[T]$. Montrer que $\|Q(g)\| \leqslant \|Q(f)\|$.